

# *Liaisons entre Solides d'un mécanisme*

## 2<sup>ème</sup> partie : ASSOCIATIONS DE LIAISONS

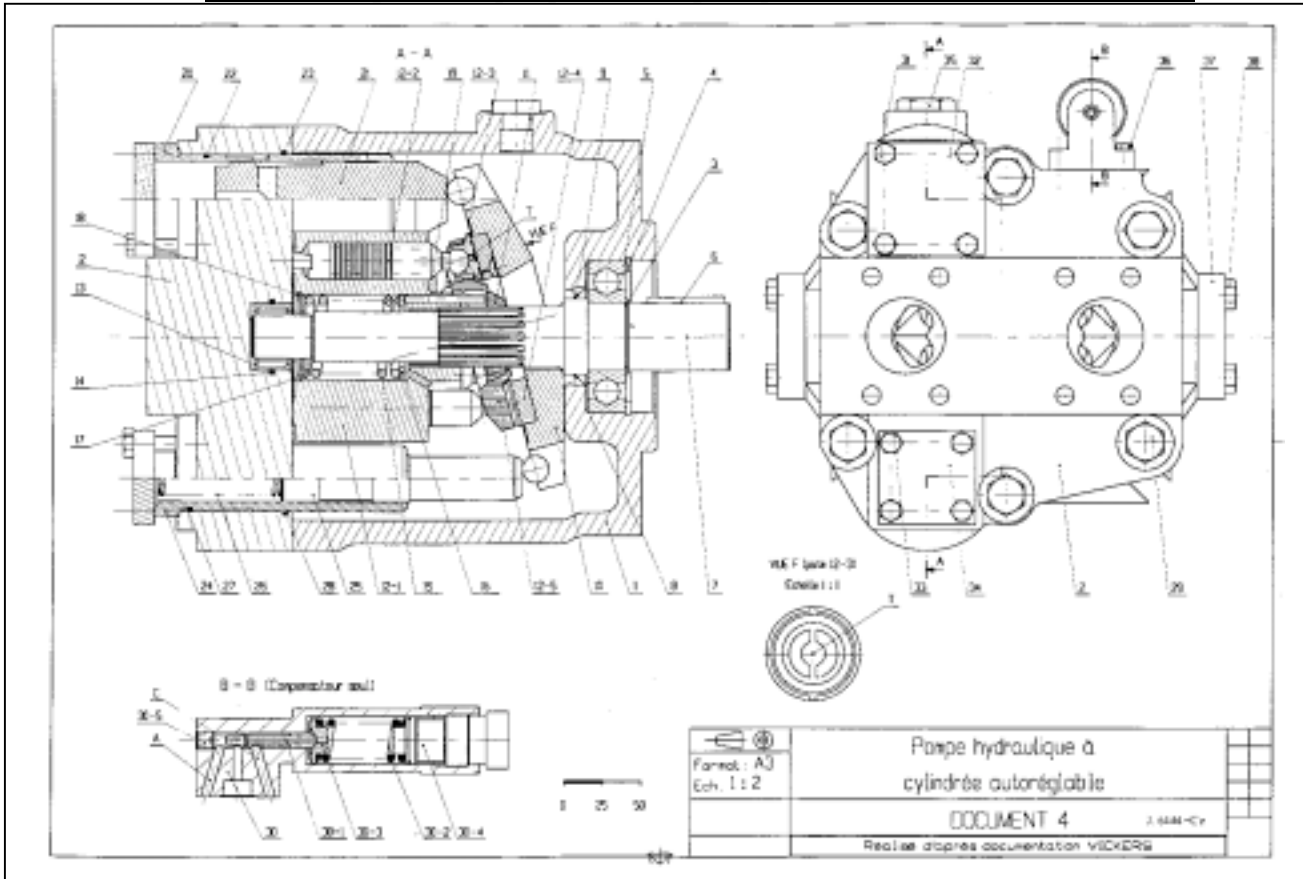
<b>1.1. DEFINITIONS.....</b>	<b>2</b>
1.1.1. <i>Dessin technique d'un mécanisme</i> .....	2
1.1.2. <i>Schémas cinématiques d'un mécanisme</i> .....	4
1.1.2.1 Schéma cinématique fonctionnel minimal .....	4
1.1.2.2 Schéma cinématique structurel .....	4
1.1.3. <i>Graphe des liaisons d'un mécanisme ou graphe des structures</i> .....	4
1.1.3.1 Méthode.....	4
1.1.3.2 Graphe de structure fermé.....	4
1.1.3.2.1 Pompe hydraulique à pistons axiaux .....	4
1.1.3.2.1.1 Schéma cinématique d'une pompe à piston axiaux : .....	4
1.1.3.2.1.2 Graphe des liaisons d'une pompe à pistons axiaux .....	6
1.1.3.3 Graphe de structure ouvert.....	6
1.1.3.3.1 Bras manipulateur : modélisation sous le point de vue de la cinématique.....	6
1.1.3.3.1.1 Présentation schématique du bras manipulateur.....	6
1.1.3.3.2 Passage progressif d'une réalité vers une modélisation du point de vue de la cinématique. ....	7
1.1.3.3.2.1 Graphe des structures (ou de liaisons).....	7
1.1.3.3.3 Définition de la géométrie juste nécessaire pour étudier la cinématique du bras manipulateur.....	7
1.2. LIAISONS CINEMATIQUEMENT EQUIVALENTES .....	8
1.2.1. <i>Liaison cinématiquement équivalente à n liaisons associées en série</i> .....	8
1.2.1.1 Définition.....	8
1.2.1.2 Torseur cinématique équivalent $\left\{ \begin{matrix} \mathcal{V} \\ eq \\ \mathcal{J}_A \end{matrix} \right\}$ .....	8
1.2.1.3 Applications.....	8
1.2.1.3.1 Réalisation d'une liaison Sphère/Plan (ponctuelle) de normale $(E, \vec{y})$ .....	8
1.2.1.3.2 Réalisation d'une liaison Cylindre/Plan (linéaire rectiligne) $(E, \vec{y}, \vec{u})$ .....	9
1.2.1.3.3 Réalisation d'une liaison Sphère/Cylindre (linéaire annulaire) $(E, \vec{x})$ .....	10
1.2.2. <i>Liaison cinématiquement équivalente à n liaisons associées en parallèle</i> .....	11
1.2.2.1 Définition.....	11
1.2.2.2 Torseur cinématique équivalent $\left\{ \begin{matrix} \mathcal{V} \\ eq \\ \mathcal{J}_A \end{matrix} \right\}$ .....	11
1.2.2.3 Applications.....	11
1.2.2.3.1 Réalisation d'une liaison glissière de direction $(O, \vec{x})$ .....	11
1.2.2.3.2 Réalisation d'une liaison sphérique à doigt $(O, \vec{x}, \vec{z})$ .....	12

# 1. ASSOCIATIONS DE LIAISONS

## 1.1. Définitions

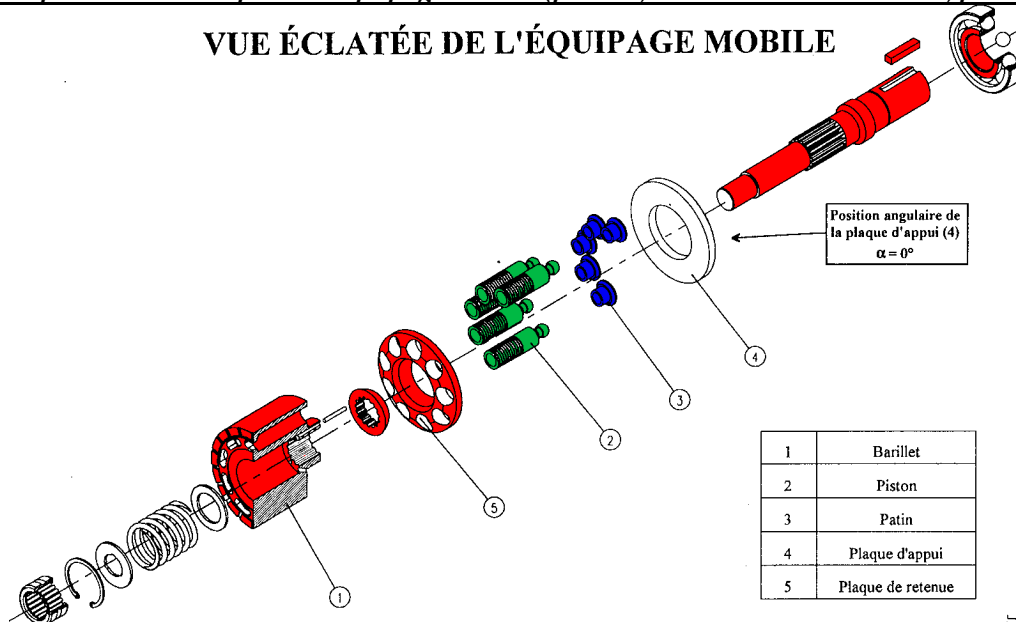
### 1.1.1. Dessin technique d'un mécanisme

Dessin technique d'une pompe hydraulique à pistons axiaux à cylindrée variable.



Perspective isométrique de l'équipage mobile (pistons, arbre d'entrée + barillet, patins)

### VUE ÉCLATÉE DE L'ÉQUIPAGE MOBILE



*Nomenclature associée au dessin technique de la pompe :*

48	Vis H	4
47	Plaque	4
46	Joint torique	1
45	Joint torique	1
44	Ressort	1
43	Piston	1
42	Cylindre	1
41	Joint torique	1
40	Plaque	1
39	Vis H	4
38	Entretoise	1
37	Joint torique	1
36	Piston	1
35	Joint torique	1
34	Cylindre	1
33	Joint torique	1
32	Bouchon	5
31	Vis H	6
30	Compensateur	1
29	Vis C	1
28	Plaquette : Sens de rotation	2
27	Plaque d'identification	1
26	Vis C	1
25	Vis C	2
24	Plaque d'identification	14
23	Vis CHc	8
22	Plaque	2
21	Joint d'étanchéité	2
20	Axe	2
19	Roulement à aiguilles	2
18	Aiguille	2
17	Bouchon de vidange	1
16	Joint torique	1
15	Joint d'étanchéité	1
14	anneau élastique	1
13	Roulement à aiguilles	1
12	Ensemble mobile	1
11	Vis CHc	2
10	Etrier	1
9	Entretoise	1
8	Rondelle	1
7	Arbre	1
6	Clavette	1
5	Roulement à billes	1
4	Circlips	1
3	Circlips	1
2	Couvercle	1
1	Carter	1
<b>N°</b>	<b>Désignation</b>	<b>Nb</b>

## 1.1.2. Schémas cinématiques d'un mécanisme

### 1.1.2.1 Schéma cinématique fonctionnel minimal

*Représentation conventionnelle rendant compte uniquement des mobilités des liaisons. Il n'existe qu'un schéma cinématique minimal.*

### 1.1.2.2 Schéma cinématique structurel

*Représentation conventionnelle rendant compte de la géométrie des contacts des liaisons  $c$  »est à dire la géométrie minimale du graphe de structure. Pour un schéma cinématique minimal donné, il peut exister plusieurs schémas cinématiques structurels.*

## 1.1.3. Graphe des liaisons d'un mécanisme ou graphe des structures

Représentation structurelle plane du mécanisme permettant, à partir du schéma cinématique :

- de définir les solides modélisant les sous-ensembles de pièces cinématiquement liées. (sommets du graphe)
- de choisir le référentiel galiléen
- d'associer à chaque solide un repère affine
- de représenter par les arcs du graphes, les liaisons normalisées (usuelles) liant les solides du mécanisme. (sous forme graphique ou sous forme torseurienne)
- de définir parfaitement la géométrie juste nécessaire
- en dynamique de placer les actions mécaniques extérieures aux différents solides, autres que les actions mécanique modélisées par les arcs du graphe.
- d'intégrer les données inertielles des différents solides (matrices d'inertie et centre d'inertie par exemples).

### 1.1.3.1 Méthode

⇒ *Les solides, numérotés de 1 à n, occupent les sommets du graphe de structure. Le galiléen est toujours repéré  $\underline{0}$ .*

⇒ *Les liaisons  $\sigma_{ij}$  relient les sommets du graphe (arcs du graphe de structure).*

⇒ *Le nombre de cycles (ou boucles) indépendants (es) constituant le graphe noté  $\gamma$  appelé nombre cyclomatique, est tel que :*

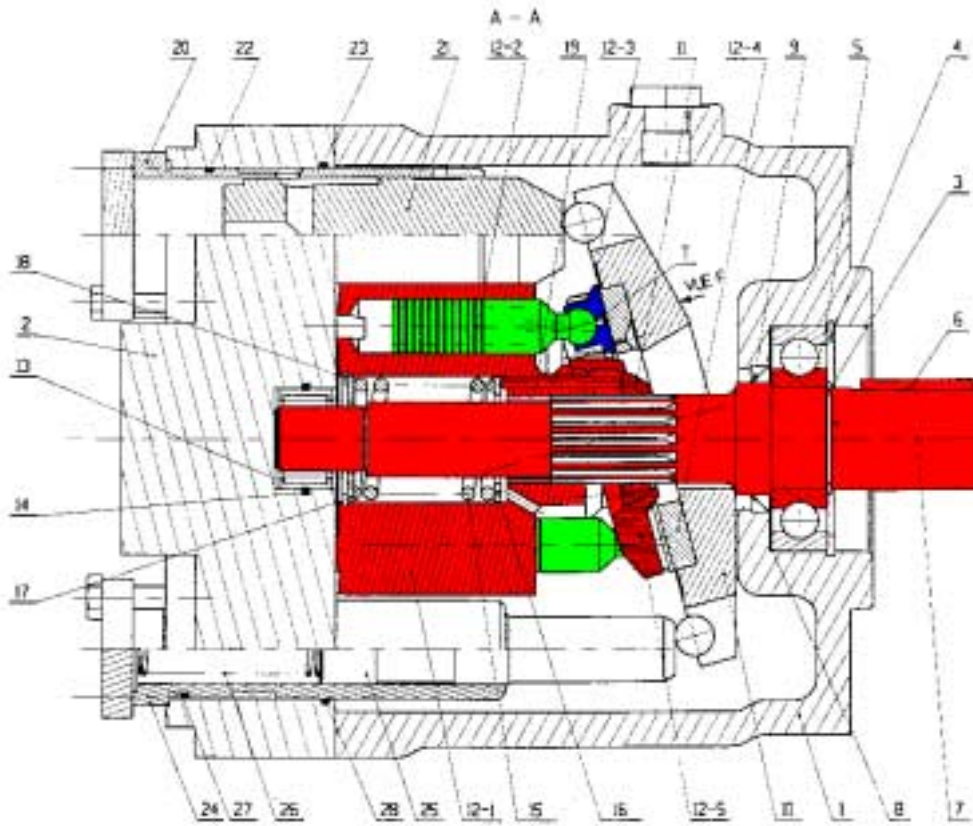
$$\gamma = l - n$$

### 1.1.3.2 Graphe de structure fermé

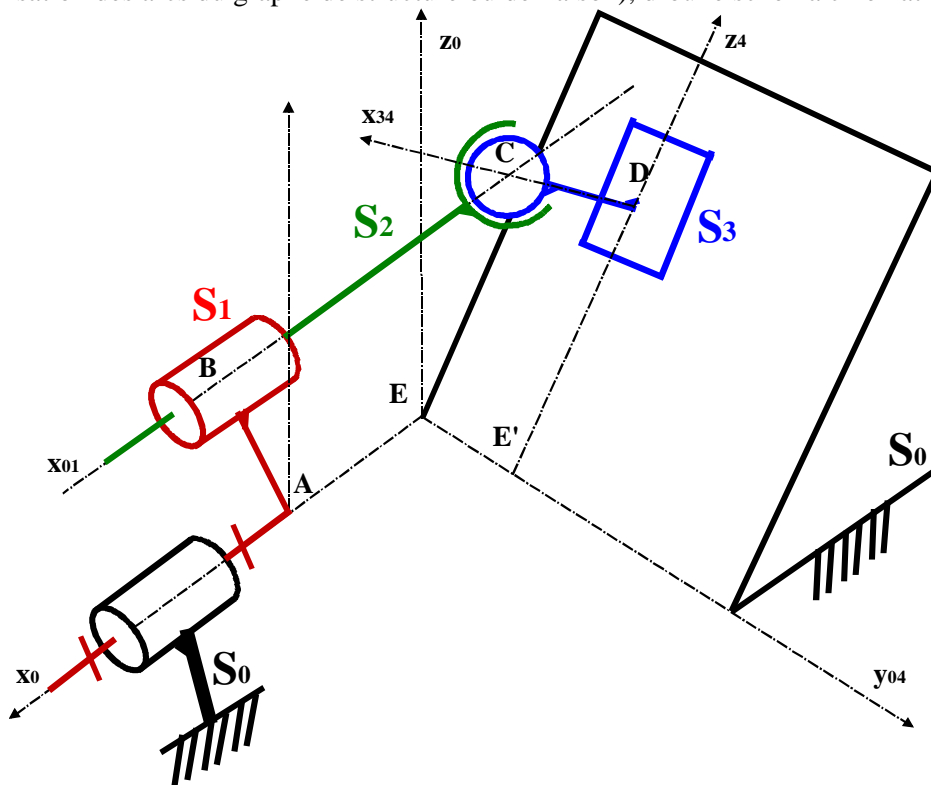
#### 1.1.3.2.1 Pompe hydraulique à pistons axiaux

##### 1.1.3.2.1.1 Schéma cinématique d'une pompe à piston axiaux :

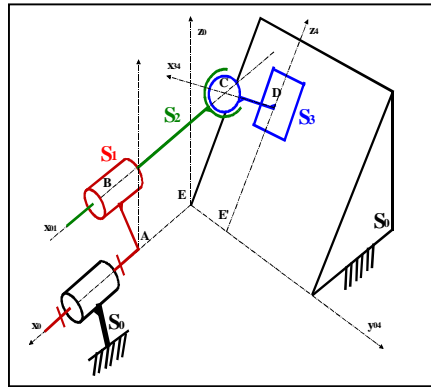
A partir du dessin technique, l'élaboration du schéma cinématique est développée dans un travail dirigé lié à ce cours. Mais il faut colorier de la même couleur toutes pièces en liaison complète (liaison encastrement). Ces différents sous-ensembles seront modélisés par un même solide (sommets du graphe des liaisons).



Par la suite, il faut modéliser à l'aide des liaisons usuelles les contacts entre ses différents solides (modélisation des arcs du graphe de structure ou de liaison), d'où le schéma cinématique suivant :



1.1.3..2.1.2 Graphe des liaisons d'une pompe à pistons axiaux

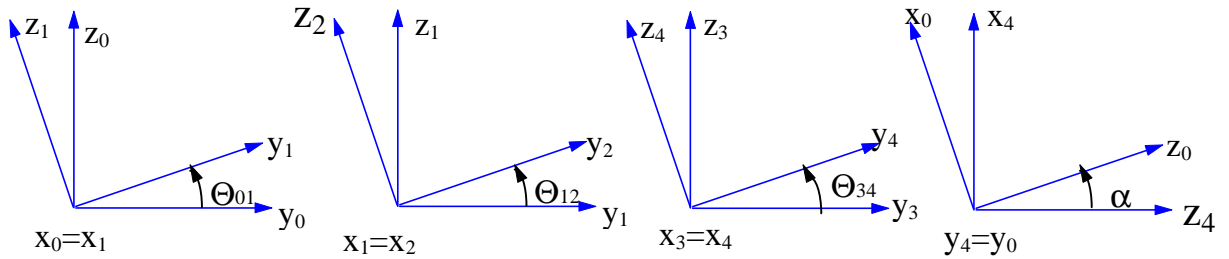


$L_{10}$  : Pivot d'axe (A,  $\vec{x}_0$ )  
 $L_{32}$  : sphérique de centre C  
 $L_{30}$  : Plane de normale (D,  $\vec{x}_3$ )  
 $L_{21}$  : Cylindre/cylindre d'axe (B,  $\vec{x}_0$ )  
 nb de solides  $n = 3$   
 nb de liaisons  $l = 4$   
 nb de cycles indépendants  $\gamma = 1$

• Paramétrage

$AB = R\vec{y}_1$   
 $DC = h\vec{x}_3$   
 $DE = -v\vec{y}_0 - w\vec{z}_4$

$CB = \lambda\vec{x}_1$   
 $AE = -d\vec{x}_0$

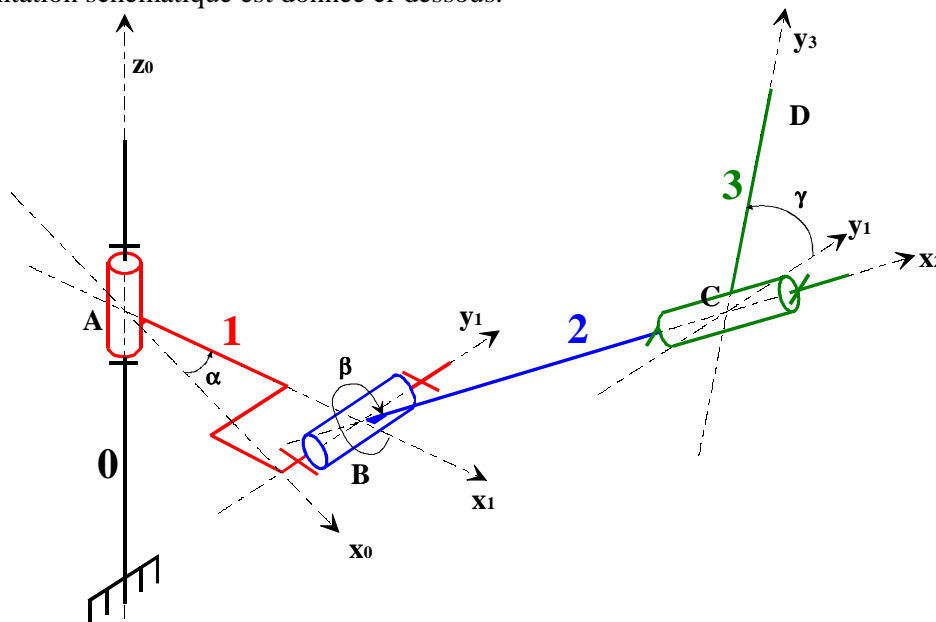


1.1.3.3 Graphe de structure ouvert

1.1.3.3.1 Bras manipulateur : modélisation sous le point de vue de la cinématique

1.1.3.3.1.1 Présentation schématique du bras manipulateur.

Le système mécanique est constitué d'un bâti 0et de trois solides 1=bras, 2=avant-bras, 3=effecteur. La représentation schématique est donnée ci-dessous.



Cette représentation est appelée schéma cinématique minimal du bras manipulateur. Ce schéma est enrichi du :

- **Repérage** : à chaque solide a été affecté un repère orthonormé direct.
- **Paramétrage** : chaque repère défini lors du repérage doit être positionné par rapport à un (ou plusieurs) autre (s).

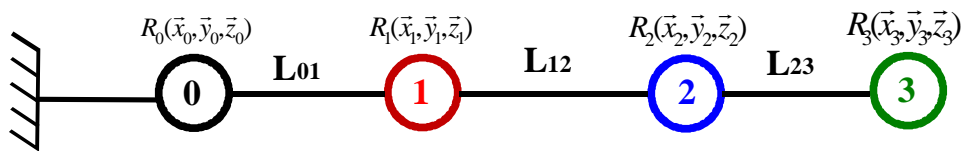
Les paramètres mis en évidence seront appelés mobilités du système mécanique. Ici, pour pouvoir animer le système, il est nécessaire de disposer de trois moteurs. C'est pourquoi,  $m=3$  ( $\alpha(t), \beta(t)$  et  $\gamma(t)$ ) définit le nombre de paramètres juste nécessaire pour définir toute la cinématique.

Les positions, les vitesses et les accélérations définissant la cinématique, seront donc exprimées en fonction  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$  et leur dérivée première ou seconde par rapport au temps.  $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$  sont appelées mobilités du mécanisme.

### 1.1.3.3.2 Passage progressif d'une réalité vers une modélisation du point de vue de la cinématique.

Une représentation structurelle de ce système sous forme de Graphe de structure (ou de liaison) est très utile lors d'une analyse mécanique d'un mécanisme.

#### 1.1.3.3.2.1 Graphe des structures (ou de liaisons)



- Les ronds de couleur représentent les **sommets du graphe** et modélisent des solides (indéformables). Chaque solide est affecté un repère orthonormé direct.
- Les traits noirs sont appelés : **arcs du graphe** et modélisent les contacts entre les différents solides composant le mécanisme. Ces arcs sont modélisés par des liaisons qui définissent la cinématique entre les deux solides reliés.

$L_{01}$  : Liaison pivot d'axe  $(A, \vec{z}_{01})$

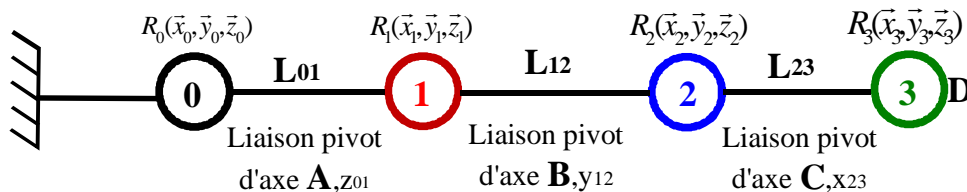
$L_{12}$  : Liaison pivot d'axe  $(B, \vec{y}_{12})$

$L_{23}$  : Liaison pivot d'axe  $(C, \vec{x}_{23})$

Le double indice indique que :  $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$ ,  $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$  et  $\vec{x}_2 = \vec{x}_3$ . Cette notation est très utile lors des calculs de dérivées vectorielles des vecteurs unitaires.

### 1.1.3.3.3 Définition de la géométrie juste nécessaire pour étudier la cinématique du bras manipulateur

En reprenant le graphe de structure :



Les points A, B, C et D sont indiqués sur le graphe de structure. Le point D est un point défini sur le solide 3. Les points A, B, C sont des points liés aux caractéristiques des liaisons identifiées dans le mécanisme. On appelle aussi ces points (A, B, C) les points idéaux associés aux liaisons.

Il est donc nécessaire de les positionner relativement les uns par rapport aux autres.

Quatre points nous donnent au minimum trois vecteurs :  $\vec{AB} = h \cdot \vec{x}_1$ ;  $\vec{BC} = d \cdot \vec{x}_2$ ;  $\vec{CD} = L \cdot \vec{y}_3$

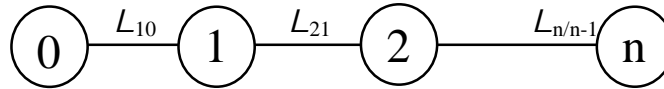


## 1.2. Liaisons cinématiquement équivalentes

### 1.2.1. Liaison cinématiquement équivalente à n liaisons associées en série

#### 1.2.1.1 Définition

(n+1) solides sont en liaisons série s'ils sont reliés suivant la chaîne suivante :



Si on désigne le torseur cinématique au point A de la liaison  $o_{ij}$  par  $\{V(S_i/S_j)\}_A$ , la liaison cinématiquement équivalente  $o_{eq}$  aux n liaisons  $o_{ij}$ , pour  $i \in [0, n-1]$ , associées en série est la liaison qui autorise le même mouvement relatif du solide n par rapport au solide 0.

#### 1.2.1.2 Torseur cinématique équivalent $\{V_{eq}\}_A$

Le torseur cinématique équivalent, en un point A, à n liaisons en série est égal à la somme des torseurs cinématiques des n liaisons exprimées au même point A.

$$\{V_{eq}\}_A = \{V(S_n/S_0)\}_A = \sum_{i=1}^n \{V(S_i/S_{i-1})\}_A$$

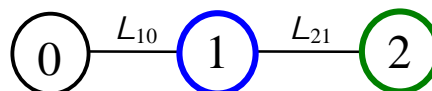
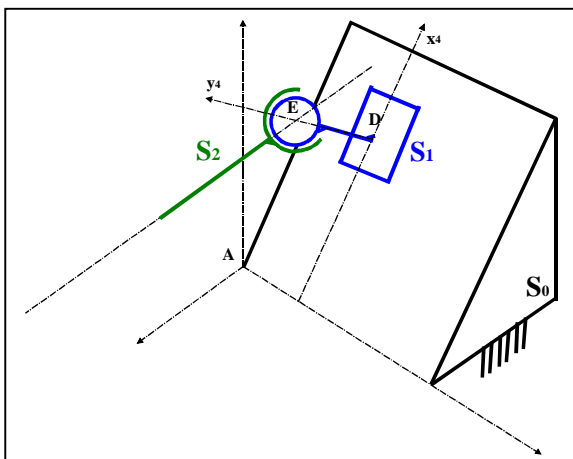
#### 1.2.1.3 Applications

La principale application de l'association de liaisons en série est de pouvoir remplacer des liaisons dont la géométrie des contacts est ponctuelle ou linéaire par des assemblages de liaisons simples à contact surfacique.

Dans la pratique, si la surface de contact est faible, la pression de contact risque d'être supérieure à la pression de contact admissible par l'un ou l'autre des matériaux entraînant ainsi une déformation plastique irréversible (écrouissage).

LIAISONS SIMPLES A CONTACT	
PONCTUEL /LINEIQUE	SURFACIQUE
Ponctuelle	Appui plan
Linéaire rectiligne	Sphérique
Linéaire annulaire	Pivot glissant

#### 1.2.1.3.1 Réalisation d'une liaison Sphère/Plan (ponctuelle) de normale $(E, \vec{y})$



- $L_{10}$  : Appui plan de normale  $(-, \vec{y})$ , en tout point de l'espace
- $L_{21}$  : Rotule de centre  $(E, -)$  pour toute base.



La cinématique de  $S_2$  par rapport à  $S_1$ , plus la cinématique de  $S_1$  par rapport à  $S_0$ , est égale plus la cinématique de  $S_2$  par rapport à  $S_0$ , par composition de mouvement. La cinématique est modélisée par les torseurs cinématiques d'où :

Comment choisir le point et la base de travail ? , 
$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_{E,R_4} = \left\{ \begin{matrix} 0 & u_{10} \\ \beta_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{matrix} \right\}_{E,R_4} + \left\{ \begin{matrix} \alpha_{21} & 0 \\ \beta_{21} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 \end{matrix} \right\}_{E,-}$$

Le choix est simple pour éviter au maximum les calculs :

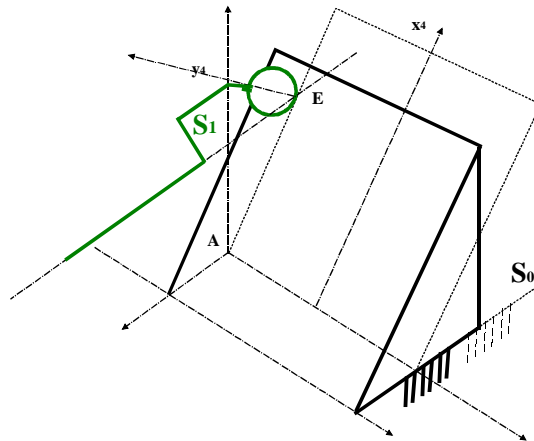
Faire la somme des torseurs en E dans la base  $R_4$ , 
$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_{E,R_4} = \left\{ \begin{matrix} 0 & u_{10} \\ \beta_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{matrix} \right\}_{E,R_4} + \left\{ \begin{matrix} \alpha_{21} & 0 \\ \beta_{21} & 0 \\ \gamma_{21} & 0 \end{matrix} \right\}_{E,R_4}$$

Il vient :

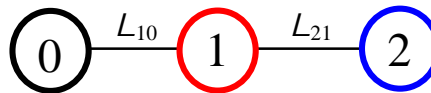
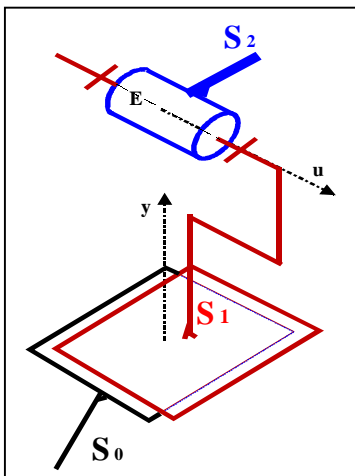
$$\left\{ \begin{matrix} \alpha = \alpha_{21} & u = u_{10} \\ \beta = \beta_{10} + \beta_{21} & v = 0 \\ \gamma = \gamma_{21} & w = w_{10} \end{matrix} \right\} \wedge \left\{ V_{eq} \right\}_E = \left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & 0 \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_{E,R_4}$$

$$\left\{ V_{eq} \right\}_E = \left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & 0 \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_{E,R_4}$$

Torseur d'une **liaison Sphère/Plan (ponctuelle) de normale**  $(E, \vec{y})$



1.2.1.3.2 Réalisation d'une liaison **Cylindre/Plan (linéaire rectiligne)**  $(E, \vec{y}, \vec{u})$



$L_{10}$  : Appui plan de normale  $(-, \vec{y})$

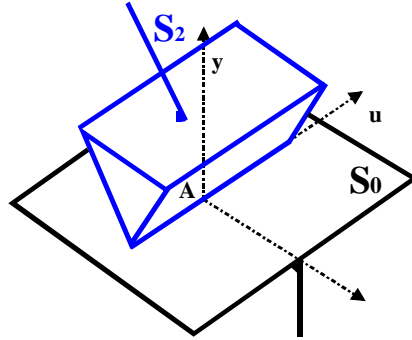
$L_{21}$  : Pivot d'axe  $(E, \vec{u})$

D'où :

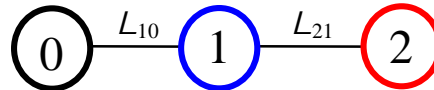
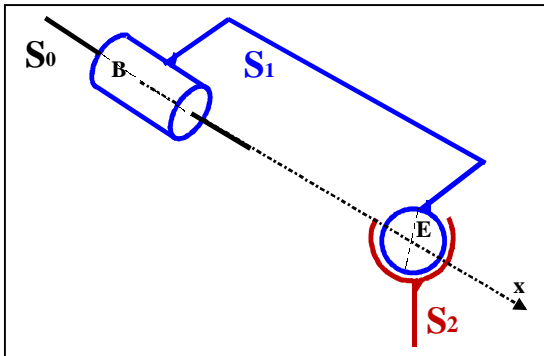
$$\left\{ \begin{matrix} \alpha & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{matrix} \right\}_{E, \vec{u}, \vec{y}, -} = \left\{ \begin{matrix} 0 & u_{10} \\ \beta_{10} & 0 \\ 0 & w_{10} \end{matrix} \right\}_{E, \vec{u}, \vec{y}, -} + \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma_{21} & w_{21} \end{matrix} \right\}_{E, \vec{u}, \vec{y}, -}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0 \\ \beta = \beta_{10} \\ \gamma = \gamma_{21} \end{array} \quad \begin{array}{l} u = u_{10} \\ v = 0 \\ w = w_{10} + w_{21} \end{array} \right\} \Lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} 0u \\ \beta 0 \\ \gamma w \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} 0u \\ \beta 0 \\ \gamma w \end{array} \right\}_{E, \vec{u}, \vec{y}, -}$$

Liaison Cylindre/Plan ( $E, \vec{y}, \vec{u}$ ) de torseur cinématique :  $\left\{ \begin{array}{l} 0u \\ \beta 0 \\ \gamma w \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} 0u \\ \beta 0 \\ \gamma w \end{array} \right\}_{E, \vec{u}, \vec{y}, -}$



1.2.1.3.3 Réalisation d'une liaison Sphère/Cylindre (linéaire annulaire) ( $E, \vec{x}$ )



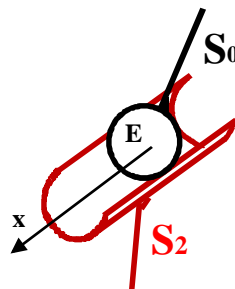
$L_{10}$  : Pivot glissant d'axe ( $B, \vec{x}$ )

$L_{21}$  : Rotule de centre E

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha u \\ \beta v \\ \gamma w \end{array} \right\}_{E, \vec{x}, -} = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{10} u_{10} \\ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \end{array} \right\}_{E, \vec{x}, -} + \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{21} 0 \\ \beta_{21} 0 \\ \gamma_{21} 0 \end{array} \right\}_{E, \vec{x}, -}$$

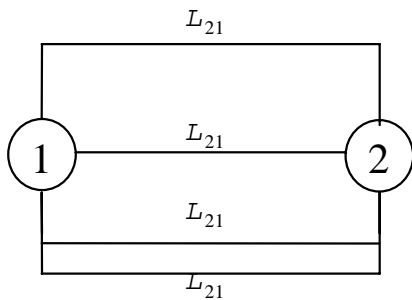
$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_{10} + \alpha_{21} \\ \beta = \beta_{21} \\ \gamma = \gamma_{21} \end{array} \quad \begin{array}{l} u = u_{10} \\ v = 0 \\ w = 0 \end{array} \right\} \Lambda \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha u \\ \beta 0 \\ \gamma 0 \end{array} \right\}_E = \left\{ \begin{array}{l} \alpha u \\ \beta 0 \\ \gamma 0 \end{array} \right\}_{E, \vec{x}, -}$$

liaison Sphère/Cylindre d'axe ( $E, \vec{x}$ )



1.2.2. Liaison cinématiquement équivalente à n liaisons associées en parallèle

1.2.2.1 Définition



Deux solides sont en liaisons parallèles s'ils sont reliés suivant la chaîne cinématique suivante :

Si  $\{V_{i(S_1/S_2)}\}_A$  désigne le torseur cinématique au point A de la liaison  $L_{12}^i$ , la liaison cinématiquement équivalente aux n liaisons  $L_{12}^i$  associées en parallèle est la liaison qui est compatible avec les n liaisons  $L_{12}^i$ .

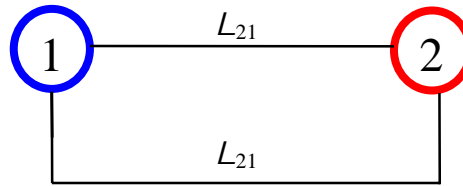
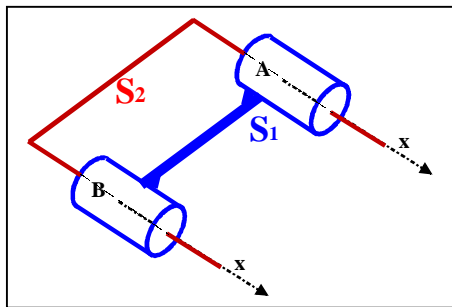
1.2.2.2 Torseur cinématique équivalent  $\{V_{eq}\}_A$

Le torseur cinématique équivalent, en un point A, à n liaisons en parallèle est égal à chaque torseur cinématique des n liaisons exprimées au même point A.

$$\{V_{eq}\}_A = \{V_{i(S_1/S_2)}\}_A \quad \forall i \in [1, n]$$

1.2.2.3 Applications

1.2.2.3.1 Réalisation d'une liaison glissière de direction  $(O, \vec{x})$

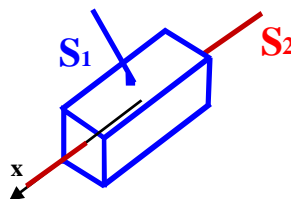


$L_{12}^1$  : Pivot glissant d'axe  $(A, \vec{x})$   
 $L_{12}^2$  : Pivot glissant d'axe  $(B, \vec{x})$

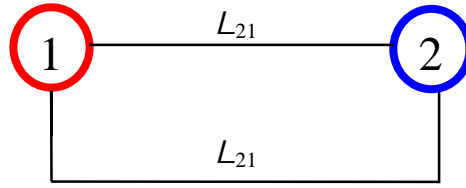
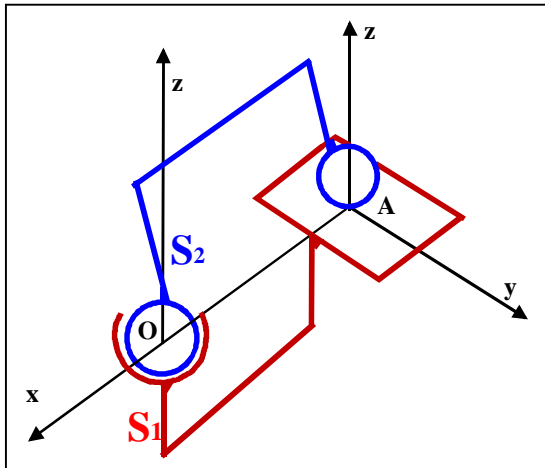
On obtient en traduisant que la cinématique est identique en passant par les deux arcs du graphe des liaisons (égalité des torseurs cinématiques associés aux deux liaisons Cylindre/Cylindre)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad u = u_1 = u_2 \\ \beta = 0 \quad v = a\alpha_1 = a\alpha_2 = 0 \\ \gamma = 0 \quad w = 0 \end{array} \right\} \quad \Lambda \quad \{V_{eq}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{-\vec{x}, -\vec{y}, -\vec{z}}$$

Liaison glissière de direction  $\vec{x}$ , de torseur cinématique :  $\{V_{eq}\}_A = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{-\vec{x}, -\vec{y}, -\vec{z}}$



1.2.2.3.2 Réalisation d'une liaison sphérique à doigt  $(0, \vec{x}, \vec{z})$



$L_{12}^1$  : Ponctuelle de normale  $(A, \vec{z})$   
 $L_{12}^2$  : Rotule de centre O

liaison sphérique à doigt  $(0, \vec{x}, \vec{z})$  de torseur cinématique  $\left\{ V_{eq} \right\}_E = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{Bmatrix}_{O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}}$

